

METHODE DES ELEMENTS FINIS APPLIQUEE AU CALCUL DU REGIME ETABLI LAMINAIRE DE CONVECTION NATURELLE DANS LES FAISCEAUX TUBULAIRES VERTICAUX DE DIMENSION FINIE

D. MAGALLON

Centre d'Etudes Nucléaires de Cadarache, SEDC/STAC—Laboratoire de Thermique et Mécanique
Théoriques, 13115 Saint-Paul-lez-Durance, France

(Reçu le 24 juillet 1980 et sous forme modifiée le 4 janvier 1981)

Résumé—L'étude présente quelques aspects physiques du régime établi de convection naturelle dans les faisceaux tubulaires verticaux limités transversalement. Les équations du problème sont résolues par la méthode aux éléments finis de Galerkin. Le domaine est divisé en éléments triangulaires. La vitesse et la température sont approchées par des polynômes du premier degré sur chaque élément. Les conditions aux limites sur la température peuvent être quelconques sous réserve que le gradient axial soit constant. Les calculs ont été effectués pour des faisceaux tubulaires de 7 et 91 aiguilles placées dans une conduite hexagonale fermée aux extrémités. Les effets d'une répartition non uniforme du flux de chaleur entre les aiguilles ont été étudiés. Les résultats montrent que des vitesses positives peuvent exister dans les régions périphériques pour les grands nombres de Rayleigh, et que le choix de la distance entre le centre du faisceau et la paroi du conduit comme longueur caractéristique est préférable à celui du diamètre hydraulique.

NOTATIONS

C ,	gradient axial de température;
C_p ,	chaleur spécifique;
D ,	diamètre d'une aiguille;
D_H ,	diamètre hydraulique ($= 4S/P_{er}$);
Gr ,	nombre de Grashof ($= \rho^2 g \beta \delta T_r l_r^3 / \mu_r^2$);
g ,	accélération de la pesanteur;
H ,	hauteur du faisceau;
L ,	largeur du faisceau;
P ,	pas du faisceau (Fig. 1);
n ,	nombre de noeuds;
N_i ,	polynôme d'interpolation;
Pe ,	nombre de Peclet ($= V_r l_r / \alpha_r$);
P_{er} ,	périmètre mouillé;
P_s ,	pression statique;
Q ,	terme source dans l'équation de l'énergie;
q ,	flux de chaleur à la surface d'une aiguille;
Ra ,	nombre de Rayleigh (paragraphe 3.1);
Re ,	nombre de Reynolds ($\rho_r V_r l_r / \mu_r$);
S ,	section transversale de passage du fluide;
T ,	température du fluide;
T_j ,	température du fluide au noeud j ;
V ,	vecteur vitesse de composantes u, v, w suivant Ox, Oy, Oz ;
w_j ,	vitesse axiale du fluide au noeud j ;
α ,	diffusivité thermique;
β ,	coefficient de dilatation thermique du fluide;
Γ ,	frontière de S ;
δT_r ,	écart de température de référence;
λ ,	conductivité thermique;
μ ,	viscosité dynamique;
ρ ,	densité.

Indices

M ,	valeur moyenne;
max,	valeur maximum;
p ,	paroi du conduit;
r ,	référence.

Indices supérieurs

e ,	sur un élément.
-------	-----------------

1. INTRODUCTION

ON S'INTÉRESSE au problème de la convection mixte et naturelle d'un fluide dans un faisceau tubulaire vertical composé d'aiguilles chauffantes: les variations de mass volumique du fluide avec la température perturbent ou engendrent, dans le champ de pesanteur, le mouvement de ce fluide. Dû à la complexité de la géométrie, une étude tridimensionnelle complète même numérique ne semble pas exister à notre connaissance sauf dans le cas où le faisceau est représenté comme un milieu poreux. Il est cependant possible de tenir compte de la géométrie réelle si, en première approximation, on considère seulement le régime établi et on applique la méthode des éléments finis. Celle-ci semble être la meilleure façon d'approcher aisément la partie fluide du faisceau.

D'un point de vue général, la méthode proposée s'applique à n'importe quel type de conduite cylindrique verticale simplement ou multiples connexes. Les résultats présentés ici concernent des faisceaux dont les aiguilles sont de section circulaire et le boîtier de section hexagonale. Ils s'appliquent essentiellement à des assemblages de réacteur nucléaire dans des

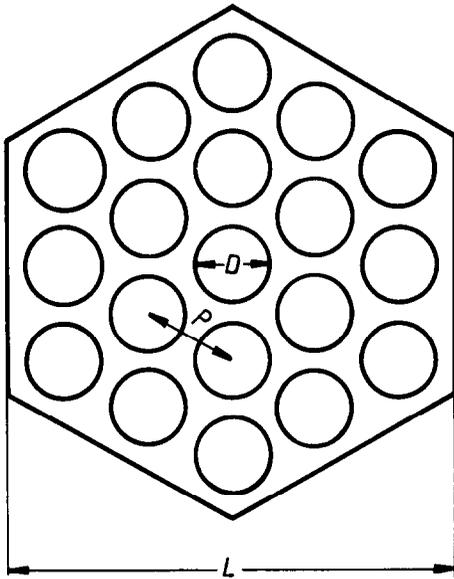


FIG. 1. Section transversale d'un faisceau 19 aiguilles hexagonal.

situations où la chaleur produite dans les aiguilles par fission doit être partiellement ou entièrement évacuée par les parois du boîtier pour éviter l'ébullition du fluide caloporteur. Dans l'étude de tels cas, comme on le verra, une représentation fine des champs de vitesse et de température ainsi que des informations en vue d'une meilleure compréhension du phénomène global, sont accessibles.

Dans le domaine des géométries du type conduite dont les génératrices sont parallèles à la direction de g , il faut citer les travaux théoriques déjà anciens d'Ostrach [1, 2] qui analyse le régime établi de convection naturelle entre deux plans parallèles, avec ou sans dissipation visqueuse, pour des milieux ouverts ou fermés. Dans ces travaux, la température et la vitesse axiale ne dépendent que d'une seule coordonnée radiale. Par la suite, les travaux sur le régime établi ont surtout concerné les milieux ouverts. Les solutions sont obtenues sous forme de séries contenant des fonctions de Bessel et Kelvin pour une dépendance bidimensionnelle du champ des variables. Iqbal *et al.* [3] présentent ainsi des résultats pour des conduites non circulaires avec température de paroi uniforme ou flux de chaleur uniforme à la paroi comme conditions aux limites. Dans le cas de région multiplement connexe, Kim *et al.* [4] obtiennent des résultats dans une cellule isolée d'un faisceau tubulaire hexagonal pour des conditions de flux imposé à la paroi des aiguilles. Yang [5] analyse la convection mixte dans des faisceaux infinis avec des conditions de température imposée à la paroi des aiguilles. Ramm *et al.* [6] étudient le cas d'une répartition non uniforme de flux de chaleur dans différents types de faisceaux, mais ne considèrent qu'une bande centrale découpée en cellules.

Une formulation variationnelle semble avoir été obtenue pour la première fois par Iqbal *et al.* [7, 8] qui

remplacent les équations de conservation et leurs conditions aux limites par le problème équivalent de la recherche des minimums d'une fonctionnelle. Dans [9], Nayak *et al.* utilisent une méthode des éléments finis basée sur le même principe variationnel et présentent des solutions pour des conduites de section carrée ou triangulaire avec température à la paroi uniforme. Comme le font remarquer Del Giudice *et al.* [10], cette formulation ne permet pas d'utiliser n'importe quel type de conditions aux limites, particulièrement des flux de chaleur non nuls. Aussi dans [10] ces auteurs appliquent le critère plus général de Galerkin aux mêmes équations de convection que celles utilisées par Nayak. Ils font une transformation de ces équations afin de pouvoir appliquer directement un programme de calcul développé antérieurement [11]. Ils présentent dans [10], des nombres de Nusselt obtenus dans des faisceaux ouverts aux extrémités en utilisant des éléments isoparamétriques et des conditions c.e température imposée aux parois des aiguilles.

Dans tous les travaux signalés, le problème des faisceaux fermés aux extrémités (donc en convection naturelle pure) n'est pas abordé. On propose ici d'appliquer la méthode aux éléments finis de Galerkin pour traiter un tel problème. En vue d'application à des faisceaux comportant un grand nombre d'aiguilles, des éléments triangulaires rectilignes sont choisis. Le programme obtenu peut traiter indifféremment des conditions aux limites de flux ou de température imposé. Il est appliqué tout d'abord au cas de la convection mixte dans les conduites de section carrée et dans les faisceaux infinis. Les résultats sont comparés à ceux obtenus par Nayak [9] et Yang [5]. On calcule ensuite l'écoulement dans des faisceaux de 7 et 91 aiguilles fermés aux extrémités, pour des conditions aux limites de flux imposé uniforme ou non aux parois des aiguilles et de température fixée à la paroi du boîtier. Les résultats sont discutés en détail. On rappelle tout d'abord les hypothèses nécessaires à l'existence théorique d'un régime établi de convection naturelle et les équations qui s'en déduisent.

2. FORMULATION DU PROBLEME

Soit (O, x, y, z) un repère cartésien, l'axe Oz étant vertical dirigé vers le haut. On s'intéresse à la convection mixte ou naturelle d'un fluide incompressible dans un conduit vertical de section quelconque simplement ou multiplement connexe. On suppose un flux de chaleur axial constant dans le fluide soit : $\partial T/\partial z = C$. Une telle condition peut exister suffisamment loin des extrémités d'un faisceau pour lequel $H/D_H \gg 1$, si $\partial T/\partial z = C$ à la paroi du faisceau et $\partial q/\partial z = 0$ aux parois des aiguilles. On fait de plus les hypothèses classiques dans l'étude de la convection naturelle d'un fluide pour lequel la masse volumique est indépendante de la pression, à savoir :

(i) Les propriétés physiques sont supposées constantes sauf la masse volumique dans les forces de volume, terme moteur des effets de convection naturelle (Ap-

proximation de Boussinesq). Dans ce terme on considère une variation linéaire de ρ en fonction de T d'où la relation :

$$\rho = \rho_r[1 - \beta_r(T - T_r)] \quad (1)$$

où

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right).$$

(ii) La dissipation visqueuse et le travail des forces de pression sont négligés.

Avec ces hypothèses on peut supposer que dans la région où $\partial T / \partial z = C$ des conditions de régime établi existent, soit $u = v = 0$. Les équations de l'écoulement dans cette région s'écrivent alors :

$$\mu \nabla^2 w + \rho_r g \beta_r (T - T_r) = \frac{dp}{dz} + \rho_r g \quad (2)$$

$$-\alpha \nabla^2 T + Cw = Q \quad (3)$$

où

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

En prenant une température de référence à la cote z , par exemple la température en paroi T_p , les deux membres de (2) sont constants. En effet, $(T - T_p)$ et w ne sont fonctions que de x et y ; les variations de μ sont négligées par hypothèse; la relation (1) associée à la définition de β montre que le produit $\rho\beta$ est constant; par conséquent le premier membre n'est fonction que de x et y . Par ailleurs le second membre de (2) n'est fonction que z . Le groupe $(dp/dz + \rho_r g)$ peut ainsi être défini de façon unique en ajoutant au système (2)–(3) la forme intégrée de l'équation de continuité qui s'écrit :

$$\frac{1}{S} \iint_S w \, dS = V_M \quad (4)$$

où V_M est la vitesse axiale moyenne du fluide. $V_M = 0$ dans le cas de conduits fermés. Pour une géométrie donnée et des conditions aux limites fixées, la résolution du système (2)–(4) fournit la solution du problème.

3. EQUATIONS SANS DIMENSION

Dans la suite on prendra $Q = 0$. On pose :

$$x' = \frac{x}{D_H} \quad (\text{id. pour } y \text{ et } z)$$

$$T' = \frac{T - T_p}{\delta T_r}, \quad w' = \frac{w}{V_r}, \quad p' = (p_s + \rho_r g z) / \rho_r V_r^2,$$

D_H est choisi comme longueur de référence. Pour des conditions aux limites du type température imposée, l'écart de température de référence δT_r est pris égal à la différence entre la température de la paroi la plus chaude et celle de la paroi la plus froide. Dans le cas où un flux est imposé, on pose $\delta T_r = q D_H / \lambda$. Le choix de V_r dépend du type de convection et est défini dans la suite.

3.1. Convection mixte ou naturelle en conduit ouvert

On a dans ce cas une vitesse de référence naturelle qui est la vitesse moyenne du fluide V_M . On en déduit le système sans dimension suivant :

$$\nabla^2 w' + \frac{Gr}{Re} T' = Re \frac{dp'}{dz'} \quad (5)$$

$$\nabla^2 T' - \frac{D_H}{\delta T_r} Pe C w' = 0 \quad (6)$$

$$(1/S') \iint_{S'} w' \, dS = 1. \quad (7)$$

Le système (5)–(7) dépend des deux paramètres Gr/Re et $D_H Pe C / \delta T_r$, et des conditions aux limites. Pour les conditions aux limites homogènes sur T on peut poser :

$$T^* = \frac{\delta T_r}{D_H Pe C} T'.$$

Les équations (5) et (6) deviennent ainsi :

$$\nabla^2 w' + Ra T^* = Re \frac{dp'}{dz'} \quad (5a)$$

$$\nabla^2 T^* - w' = 0 \quad (6a)$$

où Ra est un nombre de Rayleigh donné par :

$$Ra = \frac{\rho^2 g \beta C p C D_H^4}{\lambda \mu}. \quad (8)$$

Le système (5a), (6a), (7) ne dépend alors plus que d'un seul paramètre (R_a) et du type de conditions aux limites.

3.2. Convection naturelle en milieu fermé

On choisit V_r de façon à ce que l'équation (3) soit indépendante des propriétés physiques du fluide soit :

$$V_r = \frac{\lambda \delta T_r}{\rho D_H^2 C p C} \quad (9)$$

ce qui conduit au système sans dimension suivant :

$$\nabla^2 w' + Ra T' = Re \frac{dp'}{dz'} \quad (10)$$

$$\nabla^2 T' - w' = 0 \quad (11)$$

$$\iint_{S'} w' \, dS = 0. \quad (12)$$

A nouveau le système (10)–(12) ne dépend que de R_a et des conditions aux limites. En particulier, il est indépendant du flux et de la température de la paroi si des valeurs uniformes sont imposées. Les équations (10), (11) sont les mêmes que (5a), (6a) mais il n'est pas nécessaire ici que les conditions aux limites sur T soient homogènes. Dans la suite, w et T désigneront les grandeurs sans dimension définies dans ce paragraphe.

4. TRAITEMENT NUMERIQUE

La méthode des éléments finis [12] a été choisie principalement parce qu'elle permet une meilleure représentation des géométries compliquées par rapport à la méthode des différences finies. Dans notre cas, le domaine étudié (c'est-à-dire la partie fluide S d'une section transversale du faisceau) est divisé en éléments triangulaires rectilignes. Les fonctions w et T sont supposées varier linéairement dans chaque triangle. Les valeurs inconnues sont situées aux sommets. Du point de vue mathématique, la convergence n'est pas systématique lorsqu'on raffine le maillage, dans le cas où des domaines aux frontières courbes sont représentés avec de tels éléments. Cependant, de nombreuses applications sont faites dans ce cas et conduisent à des résultats valables [13]. Ici, les contours des aiguilles sont représentés de cette façon et on verra que les résultats obtenus sont satisfaisants.

On a utilisé la méthode de Galerkin qui est une méthode aux résidus pondérés dans laquelle les fonctions de pondération sont prises égales à celles définissant l'approximation. Ce sont ici des polynômes du premier degré en x et y . L'application du critère de Galerkin aux équations (10), (11) et l'intégration par partie des intégrales ainsi obtenues, conduit aux six relations suivantes valables sur chaque élément.

$$\iint_{S^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial w^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial w^e}{\partial y} + N_i \left(Re \frac{dp}{dz} - Ra T^e \right) \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i \frac{\partial w^e}{\partial n} dl = 0 \quad (10a)$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$\iint_{S^e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T^e}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T^e}{\partial y} + N_i w^e \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} N_i \frac{\partial T^e}{\partial n} dl = 0 \quad (11a)$$

où

$$w^e = \sum_{j=1}^3 N_j w_j \quad (13)$$

$$T^e = \sum_{j=1}^3 N_j T_j \quad (14)$$

et N_i sont les polynômes d'interpolation déduits de l'approximation linéaire de w et T sur l'élément. Lorsqu'on remplace w^e et T^e par (13) et (14) dans (10a) et (11a), le calcul des intégrales sur S^e est immédiat grâce aux formules données dans [13] par exemple. On obtient alors un système de six équations indépendantes avec w_i , T_i pour $i = 1-3$ comme inconnues. Les intégrales sur Γ^e sont également inconnues mais s'annulent deux à deux dans le processus d'assemblage qui relie entre elles les équations de chaque élément. Seules demeurent les intégrales sur les portions

de Γ^e appartenant à la frontière Γ de S . Là s'appliquent les conditions aux limites : si les valeurs de w ou T sont connues sur Γ , il n'est pas nécessaire d'évaluer ces intégrales ; si les flux constants sont connus, celles-ci sont évaluées à l'aide de formules données dans [13]. Ainsi on obtient un système de $2n$ équations à $2n$ inconnues (i.e. w_i et T_i pour $i = 1, n$) écrit sous forme matricielle.

L'assemblage des matrices élémentaires se fait par l'intermédiaire d'une matrice d'assemblage A dont le rôle est d'assurer la formation complète des équations de chaque noeud. Ces équations sont éliminées de A dès qu'elles sont complètement formées et stockées dans un tableau à une dimension qui peut éventuellement être envoyé sur mémoire périphérique. De cette façon, la dimension de A ne dépasse pas la valeur de la demi-largeur de bande de la matrice globale. Lorsque tous les éléments (donc tous les noeuds) ont été traités par cette procédure, on introduit les conditions aux limites. La vérification de la condition (12) [ou (7)] est assurée par itération à partir d'une valeur arbitraire la constante de $Re dp/dz$. A chaque itération le système est résolu par élimination gaussienne et une nouvelle valeur de la constante est introduite dans le terme source. La troisième itération assure la convergence. Les maillages comportant un grand nombre de points ont été réalisés à partir d'un programme existant.

5. RESULTATS ET DISCUSSIONS

5.1. Comparaison avec des résultats existant en convection mixte

Le programme a été testé dans le cas d'une conduite de section carrée dont les parois sont maintenues à température constante. Les résultats, portés sur la Fig. 2, correspondent à ceux de Nayak [9]. D'autres calculs ont été effectués dans le cas d'un faisceau tubulaire infini à pas triangulaire dans le but de tester l'influence du raffinement du maillage lorsqu'on remplace les frontières courbes par des segments de droite. Les résultats de Yang [5] ont été pris comme référence : on considère une cellule isolée (Fig. 3), des conditions aux limites du type température uniforme aux parois des aiguilles et $\partial T/\partial n = \partial w/\partial n = 0$ aux axes de symétrie. Trois maillages différents ont été utilisés (Fig. 3), déduits les uns des autres par l'adjonction d'un nouveau point au milieu des cotés de chaque élément du maillage précédent à l'exception des limites courbes. Pour celles-ci on a pris le milieu de l'arc correspondant. Les calculs ont été effectués pour $P/D = 1,25$. On a porté sur la Fig. 4 les résultats obtenus sur la droite $\phi = 0$, c'est-à-dire à la frontière de la cellule, où la distance entre deux aiguilles est minimum. On constate que l'on tend vers les courbes de Yang lorsque le nombre de points de calcul augmente. Le maillage le plus simple à trois éléments (3 points de calcul pour w et T ; 1 seul point sur la droite $\phi = 0$ située à $P/2$) donne des valeurs de w et T voisines de celles obtenues par Yang en ce point. L'écart sur T est de

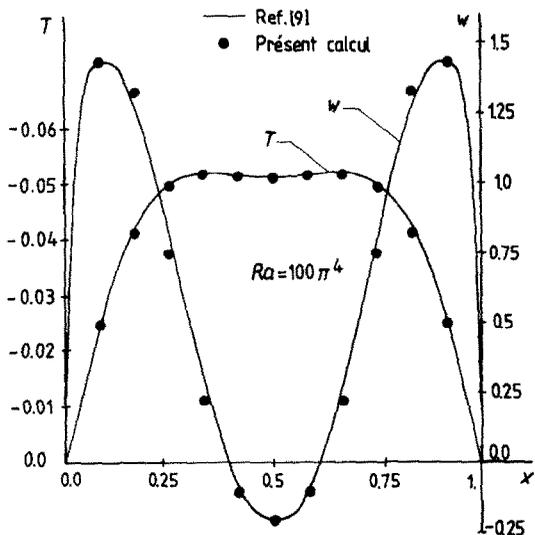


FIG. 2. Distribution de vitesse et de température dans une conduite de section carrée.

moins de 10% dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire pour $Ra = 5663$.

5.2. Application aux faisceaux fermés aux extrémités

Nous nous sommes limités au cas de faisceaux composés d'aiguilles placées dans un boîtier hexagonal. Deux cas de figure ont été envisagés, soit 7 et 91 aiguilles avec conditions de flux imposé aux parois des aiguilles et température uniforme dans le plan horizontal à la paroi du boîtier.

5.2.1. Faisceau 7 aiguilles. On s'est placé dans le cas $q = cte$. Cette hypothèse permet de restreindre le domaine d'étude à 1/12ème du faisceau. Les conditions

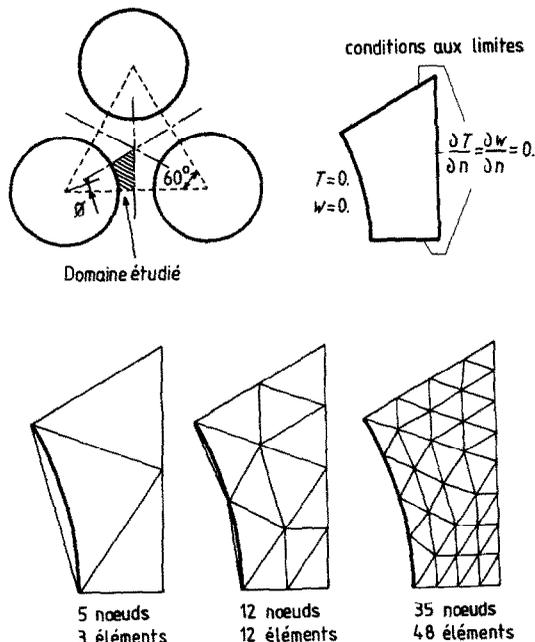


FIG. 3. Différents types de maillage utilisés dans le cas d'une cellule triangulaire.

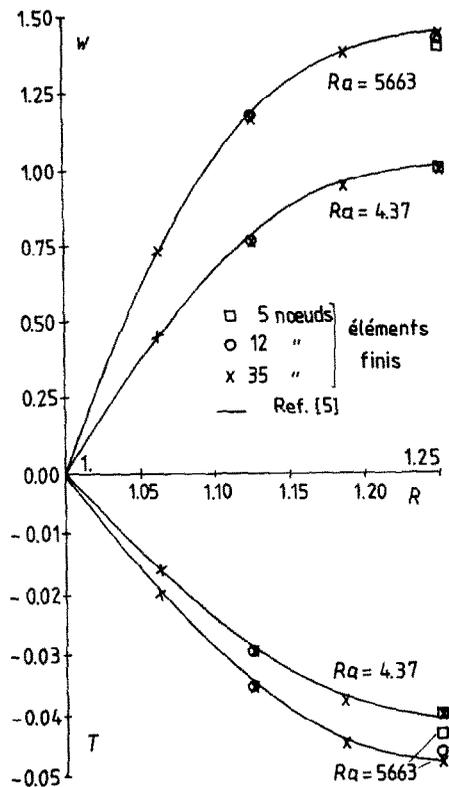


FIG. 4. Comparaison avec les résultats de Yang [5] dans un faisceau infini.

aux limites fluides sont dans ce cas $\partial T/\partial n = \partial w/\partial n = 0$. Trois maillages numérotés de 1 à 3 sur la Fig. 5 ont été utilisés pour $P/D = 1,19$. Trois valeurs de Ra ont été considérées : $Ra = 2,88$, $Ra \times 10^2$ et $Ra = 1,5 \times 10^3$ ainsi que le cas conduction pure. On a porté sur la Fig. 6 les répartitions de vitesse et de température sur l'axe $y = 0$ et comparé les maillages 1 et 2 au maillage 3 qui a servi de référence. On constate dans l'ensemble un meilleur accord quantitatif sur T que sur w . En conduction comme pour $Ra = 2,88$ les écarts relatifs sur T augmentent à partir du boîtier pour se stabiliser aux environs de 10% après le point d'inflexion. Les valeurs correspondant au maillage 1 restent toujours inférieures à celles du maillage 3. Par contre pour $Ra = 1,5 \times 10^3$, les valeurs de T ont tendance à être surestimées dans le calcul avec un petit nombre de points. On remarque dans ce cas deux zones sur les courbes de T : une première zone proche du boîtier (les premiers points du maillage 1) où les écarts sont importants et varient entre 12 et 25% ; une deuxième zone qui correspond à la zone centrale du faisceau et où les écarts restent inférieurs à 6%. En ce qui concerne w l'accord quantitatif est plus difficile à obtenir étant donné les conditions aux limites de vitesse nulle qui imposent des variations importantes. La valeur $Ra = 10^2$ semble être une valeur limite en deça de laquelle des accords quantitatifs sont possibles à la fois sur T et w . Pour $Ra > 10^2$ seul l'accord sur T est satisfaisant. Il est intéressant de noter dans ce cas qu'un accord qualitatif

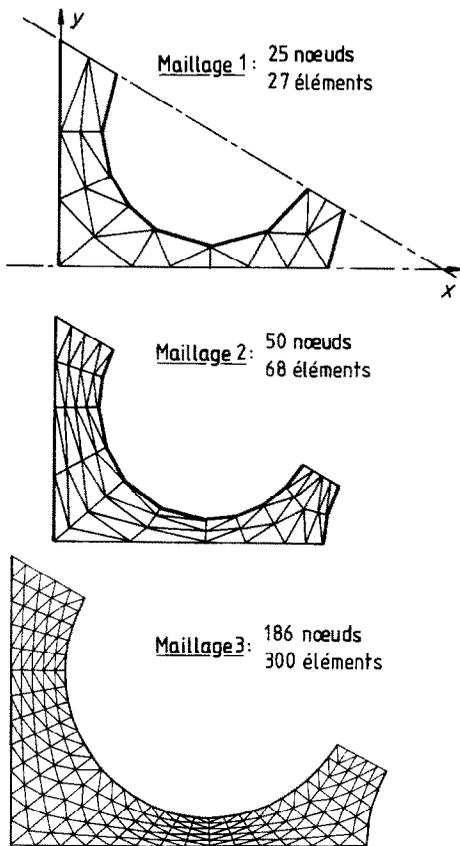


FIG. 5. Différents types de maillage utilisés pour un faisceau 7 aiguilles.

sur w suffit pour obtenir un accord quantitatif sur T . On a porté sur les Figs. 7 et 8 l'évolution des isovitesse et des isothermes lorsque Ra augmente de $2,88 \times 10^5$. Le déplacement progressif de la ligne $w = 0$ se traduit par la présence, au-delà de $Ra = 5 \times 10^3$ environ, de valeurs positives de w tout autour de l'aiguille la plus proche du boîtier. Pour $Ra = 10^5$, des valeurs négatives de w apparaissent même dans les régions centrales entre les aiguilles. Les isothermes montrent des répartitions de T fondamentalement modifiées d'un extrême à l'autre des valeurs de Ra . Pour Ra faible, elles sont proches de celles observées en conduction pure et indiquent un flux de chaleur dirigé globalement du centre vers la périphérie. Lorsque Ra augmente, d'importants gradients normaux aux parois se développent. Pour $Ra = 10^5$ les échanges par convection ont lieu uniquement près des parois, la température variant peu ailleurs. Sur la Fig. 8 sont indiqués les points où T est maximum. On remarque que pour $R < 10^2$, T_{\max} reste sur l'aiguille centrale. Pour $Ra = 1500$, T_{\max} se trouve sur l'aiguille périphérique et se déplace le long de cette aiguille lorsque Ra augmente jusqu'à $1,5 \times 10^4$. Ensuite pour $Ra = 10^5$, T_{\max} retourne au point où la distance entre l'aiguille périphérique et la paroi du boîtier est minimum. Ce comportement de T_{\max} peut s'expliquer de la manière suivante (on prend le cas $Ra = 10^5$ comme référence).

Le transport de la chaleur produite par les aiguilles par la vitesse axiale ascendante (convection axiale) est dans le cas le seul processus d'évacuation de cette chaleur: la conduction radiale est quasiment nulle puisque des conditions isothermiques existent en dehors des zones à fort gradient. La région située entre le boîtier et l'aiguille périphérique est en fait la région où le transport par convection axiale est le plus faible et par conséquent la région où apparaît T_{\max} . Pour Ra plus faible, la conduction redevient significative dans cette région par rapport à la convection et son influence pénètre dans le faisceau en direction du centre. Alors, le comportement de T_{\max} dépend de l'importance relative des deux effets.

5.2.2. Faisceau 91 aiguilles. On a utilisé un maillage identique au maillage 1 de la Fig. 5 (Fig. 9) qui donne des résultats satisfaisants pour le faisceau 7 aiguilles. Deux répartitions du flux de chaleur aux parois des aiguilles dans le plan horizontal ont été testées:

Cas 1. Flux uniforme: même valeur pour toutes les aiguilles. Dans ce cas 1/12ème du faisceau suffit pour le calcul avec $\partial T/\partial n = \partial w/\partial n = 0$ aux limites fluides (Fig. 9);

Cas 2. Flux différent pour chaque rangée d'aiguilles perpendiculaire à l'axe Ox . La variation de q est donnée par:

$$q_i = (1,9 - 0,18(i - 1))q$$

où q est le flux aux parois des aiguilles de la rangée médiane et i est le numéro de la rangée ($i = 1-5$) la première rangée étant la plus proche de l'axe y . Dans ce cas le calcul doit être fait pour un demi-faisceau avec $(\partial T/\partial y)_{y=0} = (\partial w/\partial y)_{y=0} = 0$.

Sur la Fig. 10 ont été portées les répartitions de température sur la ligne représentée en traits gras sur la Fig. 9, pour $Ra_1 = 2,88$ et $Ra_2 = 8,35$, dans les cas 1 et 2. La position des maxima sur cette ligne est repérée sur la Fig. 9. On observe un déplacement de ces valeurs du centre vers la périphérie lorsque Ra augmente de Ra_1 à Ra_2 . Ce déplacement est plus important dans le cas 2 que dans le cas 1. La comparaison de T_{\max} entre les deux cas 1 et 2 donne un écart voisin de 12% pour Ra_1 et 20% pour Ra_2 . On note sur la Fig. 10 l'existence d'une région dans le centre du faisceau où T varie très peu (cas 1) ou décroît linéairement (cas 2). Cette zone est plus large pour Ra_2 que pour Ra_1 . Ainsi l'étendue de l'influence thermique des parois froides du boîtier à l'intérieur du faisceau diminue lorsque Ra augmente: les températures ne dépendent plus que des conditions aux limites locales, i.e. de la répartition de flux.

Par ailleurs, les écarts sur T entre les résultats en conduction pure et ceux pour $Ra = 1$ (Fig. 11), sont très importants par rapport à ceux généralement rencontrés pour de faibles valeurs de Ra . Il en est de même pour les écarts observés entre deux valeurs voisines de Ra . A de tels écarts on s'attendrait à voir correspondre des écarts de l'ordre de 10^3 ou 10^4 sur Ra . Il semble donc que les valeurs de Ra utilisées soient

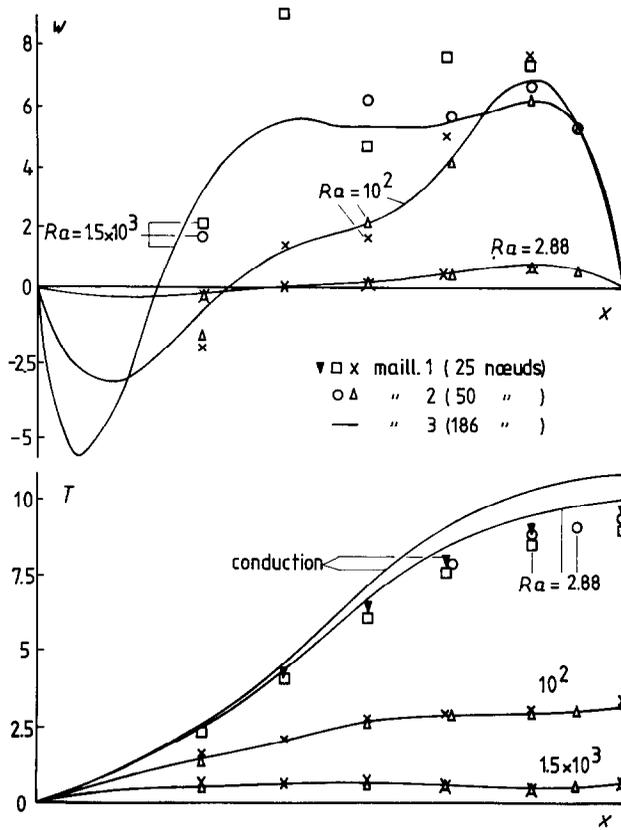


FIG. 6. Répartition de vitesse et de température sur l'axe $y = 0$ pour les trois maillages de la Fig. 5 (7 aiguilles).

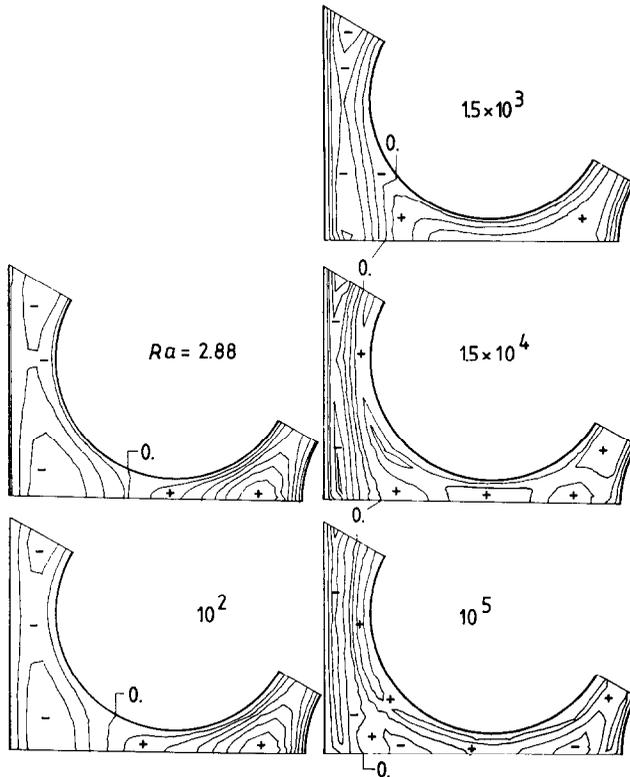


FIG. 7. 7 aiguilles: isovitesse pour différents Ra (maillage 3).

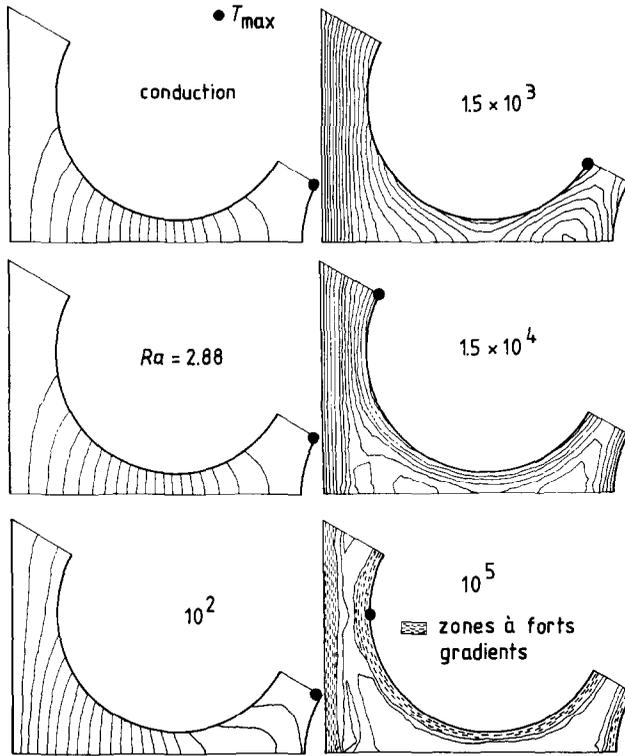


FIG. 8. 7 aiguilles: isothermes pour différents Ra (maillage 3).

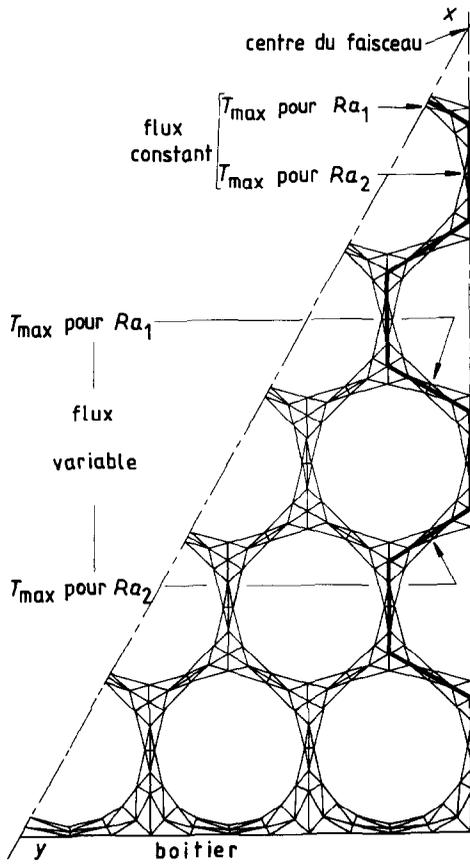


FIG. 9. $1/12^\circ$ faisceau 91 aiguilles.

trop faibles et qu'un des paramètres de référence servant à son calcul ait mal été évalué comme correspondant à une grandeur physique caractéristique du phénomène (ce qui semble naturel lorsqu'on utilise des variables sans dimension). Le seul paramètre dont le choix puisse être mis en cause est la longueur de référence qui intervient au numérateur à la puissance 4

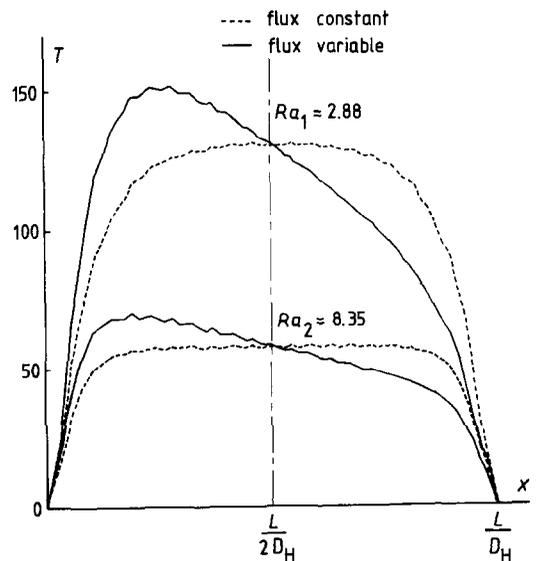


FIG. 10. 91 aiguilles: Répartitions de température sur la ligne en traits gras de la figure 9 avec et sans variation de flux.

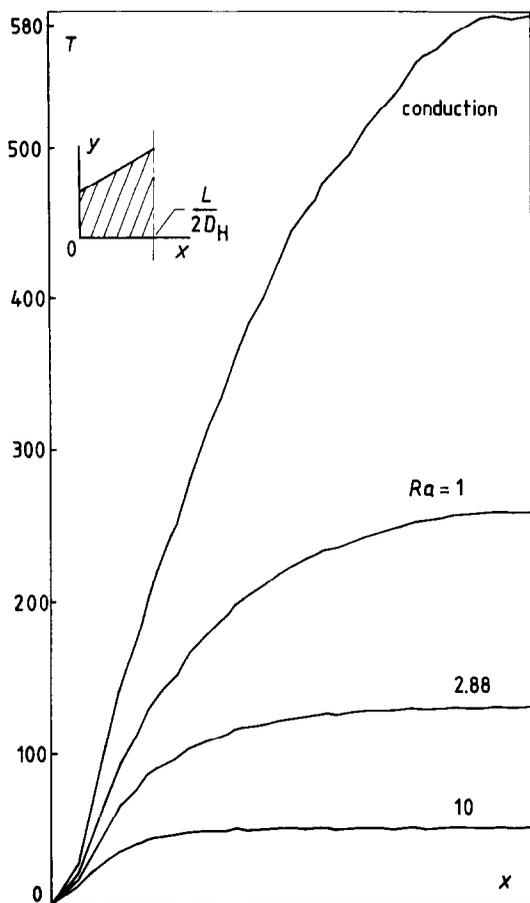


FIG. 11. 91 aiguilles : Répartitions de température sur la ligne en traits gras de la figure 9 pour un flux uniforme.

dans Ra . Si on ajoute à cela les formes des profils de T données par la Fig. 11, on est en droit de penser que $L/2$ est la longueur caractéristique adaptée dans le cas de nos conditions aux limites. Pour un faisceau 91 aiguilles cette longueur est d'un ordre de grandeur supérieur à D_H et les grands écarts observés sur la Fig. 11 sont alors explicables. Ceci n'était pas sensible au niveau du faisceau 7 aiguilles où les deux longueurs sont du même ordre de grandeur.

Enfin le choix de δT , en tant que grandeur caractéristique du phénomène doit également être reconsidéré. Il semble naturel de choisir δT , tel que la température sans dimension, soit d'ordre 1 dans le cas de la conduction. Cependant, l'étude ne permet pas d'établir une corrélation sur la base des deux faisceaux traités. On peut simplement noter que dans le cas 7 aiguilles δT , doit être du même ordre que $(qL/2\lambda)$ et que dans le cas 91 aiguilles ces deux quantités diffèrent d'un ordre de grandeur. Ceci est en accord avec la définition de V , donnée dans le paragraphe 3.2 (en remplaçant D_H par $L/2$) puisque la vitesse sans dimension reste d'ordre 1 et représente ainsi une vitesse caractéristique possible pour notre problème.

6. CONCLUSION

Le régime établi est représenté par un système différentiel relativement simple. Ceci a permis une étude détaillée tenant compte autant que possible de la géométrie exacte des faisceaux grâce à la méthode des éléments finis. On a vu que des maillages à faible nombre de points de calcul suffisent pour représenter correctement les distributions de température dans une gamme étendue de nombres de Rayleigh. Une partie des informations qualitatives apportées par les résultats présentés ne doit pas perdre de sa généralité dans le cas d'une étude plus complète du phénomène de convection naturelle en faisceau. On retiendra en particulier le déplacement du maximum de température vers la périphérie lorsque Ra augmente; la demi-largeur du faisceau comme longueur caractéristique; les différences entre les résultats flux uniforme et flux variable qui doivent se retrouver dans le cas d'un régime non établi, et qui augmentent avec Ra .

Remerciements—Je tiens à remercier M. Raymond Brun, Maître de Recherche au CNRS pour ses conseils et encouragements ainsi que le personnel du DRNR/SEDC/STAC pour sa collaboration.

REFERENCES

1. S. Ostrach, Laminar natural-convection flow and heat transfer of fluids with and without heat sources in channels with constant wall temperature, N.A.C.A., T.N. 2863 (1952).
2. S. Ostrach, Combined natural- and forced-convection laminar flow and heat transfer of fluids with and without heat sources in channels with linearly varying wall temperatures, N.A.C.A., T.N. 3141 (1954).
3. M. Iqbal, S. A. Ansari and B. D. Aggarwala, Effect of buoyancy on forced convection in vertical regular polygonal ducts, *J. Heat Transfer* **92**, 237-244 (1970).
4. J. Y. Kim and L. Wolf, Laminar mixed-convection heat transfer in finite hexagonal bundles, *Trans. Am. Nucl. Soc.* **27**, 384-385 (1977).
5. J. W. Yang, Analysis of combined convection heat transfer in infinite rod arrays, in *Proceedings of 6th International Heat Transfer Conference, Toronto Vol. 1*, pp. 49-54 (1978).
6. H. Ramm and K. Johannsen, Combined forced and free laminar convection in verticle rod bundles with longitudinal flow, A.S.M.E. paper 77-HT-44 (1977).
7. M. Iqbal, B. D. Aggarwala and A. G. Fowler, Laminar combined free and forced convection in vertical non-circular ducts under uniform heat flux, *Int. J. Heat Mass Transfer* **12**, 1123-1139 (1969).
8. M. Iqbal, B. D. Aggarwala and A. K. Khatri, On the conjugate problem of laminar combined free and forced convection through vertical non-circular ducts, *J. Heat Transfer* **94**, 52-56 (1972).
9. A. L. Nayak and Ping Cheng, Finite element analysis of laminar convective heat transfer in vertical ducts with arbitrary cross-sections, *Int. J. Heat Mass Transfer* **18**, 227-236 (1975).
10. S. Del Giudice, G. Comini and M. D. Mikhailov, Finite element analysis of combined free and forced convection, *Int. J. Heat Mass Transfer* **21**, 1619-1621 (1978).
11. M. D. Mikhailov, G. Comini, S. Del Giudice and G. P. Runchi, Determination of thermal wave distributions by the finite element method, *Int. J. Heat Mass Transfer* **20**, 195-200 (1977).
12. O. C. Zienkiewicz, *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, London (1977).
13. K. H. Huebner, *The Finite Element Method for Engineers*. John Wiley, New York (1975).

FINITE ELEMENT ANALYSIS OF FULLY-DEVELOPED LAMINAR NATURAL CONVECTION IN FINITE VERTICAL ROD BUNDLES

Abstract—This study concerns some physical aspects of fully developed natural convection in finite vertical rod bundles. The equations of the problem are solved by the finite element Galerkin method. Piecewise linear interpolation polynomials are used as shape functions for velocity and temperature with triangular elements. No restrictions are required on temperature boundary conditions except a constant axial gradient along the walls. Natural convection in closed hexagonal 7-rod and 91-rod bundles with triangular arrangement is computed. Effects of radial gradients in the power generation are studied. The results show that ascendant velocities can exist in the peripheral region for high Rayleigh numbers and that the use of the distance between the center of the bundle and the duct wall as a characteristic length is preferable to the hydraulic diameter.

UNTERSUCHUNG DER VOLL ENTWICKELTEN LAMINAREN FREIEN KONVEKTION IN ENDLICHEN VERTIKALEN STABBÜNDELN MIT DER METHODE DER FINITEN ELEMENTE

Zusammenfassung—Diese Studie behandelt einige physikalische Aspekte der voll entwickelten freien Konvektion in endlichen vertikalen Stabbündeln. Die Gleichungen des Problems werden durch die Methode der finiten Elemente nach Galerkin gelöst. Stückweise lineare Interpolationspolynome werden als Formfunktionen für Geschwindigkeit und Temperatur mit dreieckigen Elementen verwendet. Mit Ausnahme eines konstanten axialen Gradienten entlang der Wände werden für die Temperaturrandbedingungen keine Einschränkungen gefordert. In geschlossenen hexagonalen 7-Stab- und 91-Stab-Bündeln mit dreieckiger Anordnung wird die freie Konvektion berechnet. Die Einflüsse der radialen Gradienten werden untersucht. Die Ergebnisse zeigen, daß an der Peripherie bei hohen Rayleigh-Zahlen aufwärtsgerichtete Geschwindigkeiten auftreten können und daß die Verwendung des Abstandes zwischen dem Zentrum des Bündels und der Kanalwand als charakteristische Länge dem hydraulischen Durchmesser vorzuziehen ist.

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ЛАМИНАРНОЙ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПУЧКАХ СТЕРЖНЕЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аннотация — Исследуются некоторые физические аспекты установившейся свободной конвекции в вертикальных пучках стержней конечной длины. Уравнения, описывающие процесс, решаются методом конечных элементов. Для треугольных элементов в качестве сплайн-функций для скорости и температуры используются кусочно-линейные интерполяционные полиномы. При этом не требуется накладывать ограничения на температурные граничные условия, кроме постоянства аксиального градиента вдоль стенок. Рассчитывается естественная конвекция в замкнутых шестиугольных пучках из 7 и 91 стержня треугольной упаковки. Исследуется влияние радиальных градиентов на величину теплового потока. Результаты показывают, что преобладающие скорости при больших числах Рейля могут наблюдаться в периферийных областях и что в качестве характеристической длины вместо гидравлического диаметра лучше использовать расстояние между центром пучка и стенкой канала.